Prolongement de Γ dans le plan complexe. Candelpergher

Théorème : La formule intégrale $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\,dx$ permet de définir Γ comme une fonction analytique dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ et on a $\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \times \frac{1}{z+n} + \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\,dx$

Preuve :

$*$ La formule $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\,dx$ permet de définir Γ lorsque $z \in]0;+\infty[$ mais aussi pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$.

En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$, on a :

$$|e^{-x} x^{z-1}| = e^{-x}\, |e^{(z-1)\ln(x)}| = |e^{-x} e^{(\mathrm{Re}(z)-1)\ln(x)} e^{i\mathrm{Im}(z)\ln(x)}| = e^{-x} e^{(\mathrm{Re}(z)-1)\ln(x)} = e^{-x} x^{\mathrm{Re}(z)-1}.$$

et $x \mapsto e^{-x} x^{\mathrm{Re}(z)-1}$ est intégrable, donc Γ est analytique dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > 0$, pour rq

on utilise la décomposition $\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-x} x^{z-1}\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\,dx$.

- L'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\,dx$ est absolument convergente $\forall z \in \mathbb{C}$ et de plus, $\Gamma_1 : z \mapsto \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\,dx$ est analytique car holomorphe dans $\mathbb{C}$:

En effet : i) $x \mapsto e^{-x} x^{z-1}$ est continue sur $[1,+\infty[$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

ii) $\forall x \in [1,+\infty[$, $z \mapsto e^{-x} x^{z-1}$ est analytique car holomorphe sur $\mathbb{C}$ ($z \mapsto e^{-x} e^{(z-1)\ln(x)}$)

iii) Tout compact K de $\mathbb{C}$ est inclus dans un demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \leq a\}$.

$$\forall z \in K,\ |e^{-x} x^{z-1}| \leq e^{-x} x^{\mathrm{Re}(z)-1} \leq e^{-x} x^{a_K - 1} \text{ qui est intégrable}$$

Donc par le Théorème d'holomorphie, on conclut que Γ_1 est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

- L'intégrale $\int_0^1 e^{-x} x^{z-1}\,dx$ est définie $\forall z \in U := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

Par ailleurs, la fonction $\Gamma_0 : z \mapsto \int_0^1 e^{-x} x^{z-1}\,dx$ est holomorphe sur U car tout compact K de U est inclus dans un demi-plan $\{z \mid \mathrm{Re}(z) \geq \alpha\}$ où $\alpha \geq 0$.

On a alors $|e^{-x} x^{z-1}| \underset{\text{car } x \in]0,1[}{\leq} e^{-x} x^{\alpha_K - 1}$ $\forall x \in]0,1[$

Donc par le Théorème d'holomorphie, Γ_0 est holomorphe sur $]0,1[$.

* La décomposition $\Gamma(z) = \Gamma_0(z) + \Gamma_1(z)$ va nous permettre de prolonger Γ hors de U.

Γ_1 étant définie et analytique sur $\mathbb{C}$, il reste à prolonger Γ_0 en dehors de U.

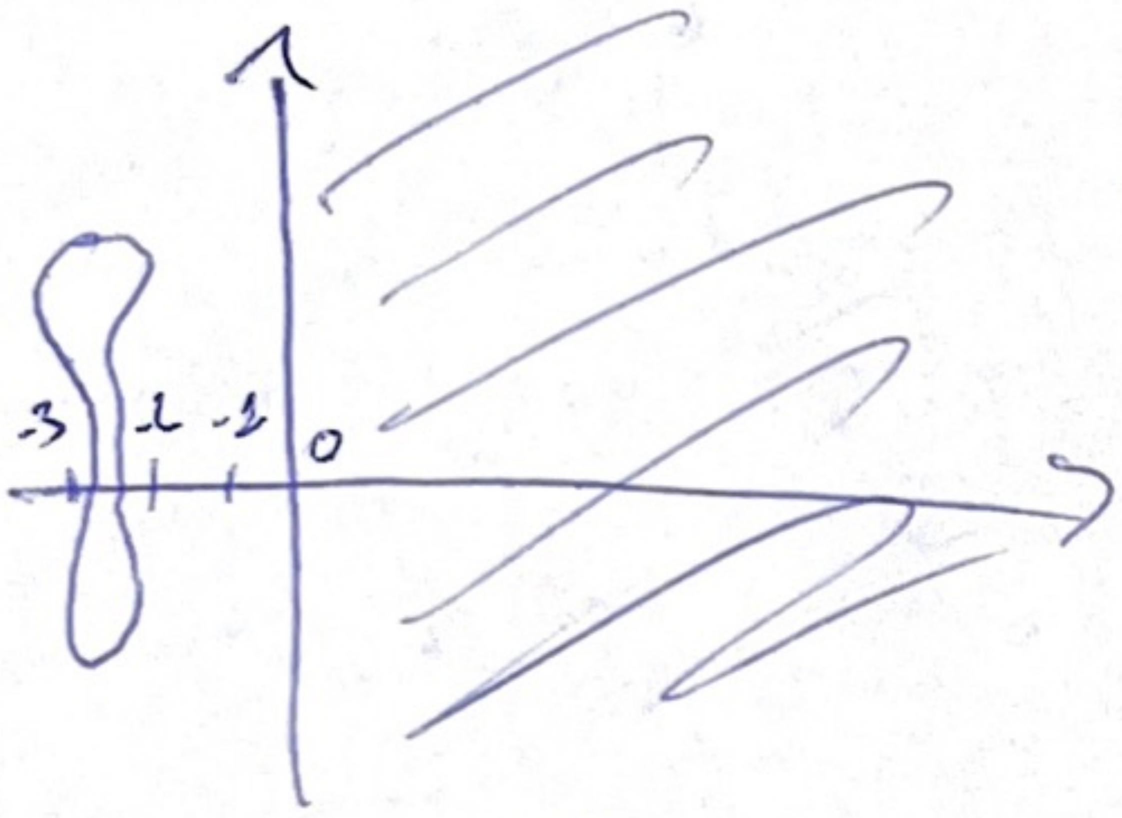
En utilisant le développement en série de l'exponentielle, on a $\forall z \in U$

$$\int_0^1 e^{-x} x^{z-1} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} x^{z-1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{n+z-1} dx \quad \text{car} \quad \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n x^n}{n!} x^{z-1}\right| dx = \int_0^1 e^{x} x^{Re(z)-1} dx < \infty \ \forall z \in U$$

D'où $\Gamma_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$ et cette expression permet de prolonger Γ_0 hors de U car la série du second membre définit une fonction analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{0,-1,\dots\}$

En effet, $\forall K$ compact dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^{-*}$, on a $\left|\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}\right| = \frac{1}{n!}\frac{1}{|z+n|}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Or $|z+n|$ = distance de z à $-n$.



$dist(\mathbb{Z}^-, K) = |z_0 + k_0| = \delta_K > 0$ car K est compact.

Alors $\left|\frac{(-1)^n 1}{n!(z+n)}\right| \leq \frac{1}{n!} \times \frac{1}{\delta_K}$ qui est le terme général d'une série convergente.

Ainsi, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \times \frac{1}{z+n}$ converge normalement sur K.

Donc Γ_0 définit une fonction analytique sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ d'après le théorème d'holomorphie des séries.

Donc $\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \times \frac{1}{z+n} + \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx$ est analytique sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$.